Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 24/25

Aufgabenserie 9 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Bilden Sie von folgenden Funktionen die ersten drei Ableitungen:

$$\textbf{a)} \quad f(x) = \sin(2x+1), \quad \textbf{b)} \quad f(x) = (3x+1)^{-1}.$$

Welche Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen hat die Funktion in b)?

2. Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2}.$$

Geben Sie die Intervalle an, in denen die Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Bestimmen Sie die Wendepunkte. Für welche x ist die Funktion konvex bzw. konkav?

3. Die Kostenfunktion für die Produktion eines Produktes in Abhängigkeit vom Produktionsausstoß x kann durch die Funktion

$$K(x) = x^3 + 19x^2 + 110x + 200$$

beschrieben werden. Wie groß sind die Grenzkosten für einen Ausstoß von $x = 10$ ME (Mengeneinheiten)? Interpretieren Sie diesen Wert.

4. Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

$$\begin{aligned} \textbf{a)*} \quad f(x) &= x^2 e^{-2x}, \quad \textbf{b)*} \quad f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x+3}, \\ \textbf{c)*} \quad f(x) &= -\frac{4}{x} + 1 - x, \quad \textbf{d)*} \quad f(x) = x^4 \ln x. \end{aligned}$$

Geben Sie die Nullstellen, die Polstellen, die Extremstellen und die Wendepunkte der jeweiligen Funktion an.
Nur für a) und d): In welchem Intervall ist die Funktion monoton wachsend, monoton fallend, konvex bzw. konkav?

5*. Ein Unternehmen operiere als Monopolist am Markt mit folgender Preis-

Nachfragefunktion:

$$p(x) = 23 - 0.1x.$$

Die Nachfrage wird durch einen entsprechenden Output befriedigt. Die Kostenfunktion des Unternehmens ist durch

$$K(x) = 0.01x^3 - 0.56x^2 + 26.6x$$

gegeben. Bestimmen Sie die Produktionsmenge x, für die der Gewinn maximal wird. Für welche Mengen x liegt das Unternehmen in der Gewinnzone?

6.* Betrachten Sie die Wachstumsfunktion

$$f(x) = 8e^{0.3x} \qquad \text{für } x \geq 1,$$

die die zeitliche Entwicklung des Produktionvolumens eines Wirtschaftssektors in Geldeinheiten (GE) in einer Region beschreibt. Die Variable x gibt die Zeit an.

a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion. Ist die Funktion konvex oder konkav?

b) Zum Zeitpunkt $x = 20$ interessiert man sich dafür, welche Wachstumsprognose (Änderung des Produktionsvolumens) näherungsweise für die nächsten Δt Zeiteinheiten unter Verwendung der Ableitung von $f(x)$ gegeben werden kann. Notieren Sie dafür eine Formel. Vergleichen Sie die Prognoseformel für $x = 20$ und $x = 30$, wobei speziell $\Delta t = 1$ angesetzt werden kann.

c) Man betrachte die allgemeine Wachstumsfunktion

$$f(x) = a\ e^{bx}$$

für das Produktionsvolumen und bestimme die Parameter a, b so, dass zur Zeit 0 ein Volumen von 20GE und zur Zeit 10 ein Volumen von 30GE vorliegt.