

Aufgabenserie 5 zur Vorlesung "Mathematik für Betriebswirte"

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 6 & -7 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 77 & 50 \\ 1 & 66 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme, falls möglich, $A + B$, $A^T + 2C$ und $A + D$.

2. Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, AB , BA , $\vec{x}A$, Cx , CD , DI und AF .

3. Für einen zweistufigen Produktionsprozess sind die jeweiligen Bedarfsgrößen an Roh- und Zwischenprodukten in den folgenden beiden Tabellen zusammengefasst:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	3	4	1	2
R_2	1	2	2	0
R_3	2	1	3	5

	E_1	E_2
Z_1	3	3
Z_2	1	2
Z_3	4	5
Z_4	2	1

R_1, R_2, R_3 bezeichnen die Rohstoffe, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 die Zwischenprodukte, E_1, E_2 die Endprodukte.

a) Zeichnen Sie den Verflechtungsgraphen. Bestimmen Sie die Gesamtverflechtungsma-

trix von Rohstoffen und Endprodukten.

b) Berechnen den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 150 Einheiten E_1 und 100 Einheiten E_2 .

c) Berechnen Sie die Rohstoffkosten zur Produktion des unter b) genannten Sortiments. Dabei sind Kosten für eine Einheit R_1 von 3 Euro, für eine Einheit R_2 von 5 Euro und für eine Einheit R_3 von 2 Euro zu berücksichtigen.

4. Man löse die Matrixgleichung

$$2X + A^T = B - 3X,$$

bezüglich der Matrix X , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -11 & 5 \\ 5 & -8 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welchen Typ muss dabei die Matrix X haben, damit die Gleichung lösbar ist?

5. Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

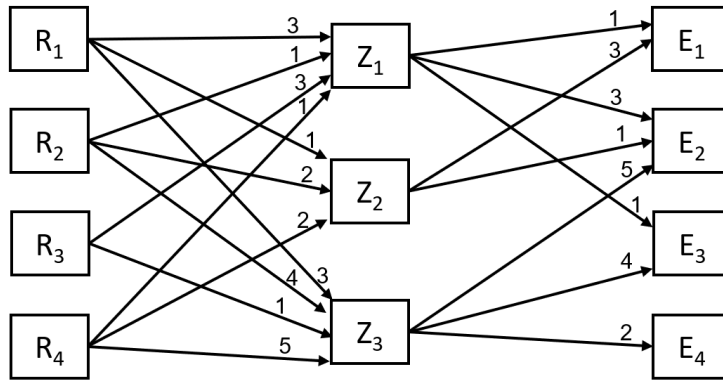
$$B + XA^T = 2X$$

erfüllt ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie dabei zunächst die Gleichung allgemein und setzen Sie dann die speziellen Matrizen A, B ein.

6*. In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und daraus wiederum die Endprodukte E_1, E_2, E_3, E_4 hergestellt. Die jeweiligen Bedarfsgrößen an den Produkten sind im folgenden Verflechtungsgraphen dargestellt:



- a) Bestimmen Sie die Verflechtungsmatrizen der Teilprozesse und die Gesamtverflechtungsmatrix von Rohstoffen und Endprodukten.
- b) Berechnen den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 200 Einheiten E_1 , 40 Einheiten E_2 , 10 Einheiten E_3 und 20 Einheiten E_4 .
- c) Berechnen Sie die Rohstoffkosten zur Produktion des unter b) genannten Sortiments. Dabei sind Kosten für eine Einheit R_1 von 1 Euro, für eine Einheit R_2 von 1 Euro, für eine Einheit R_3 von 2 Euro und für eine Einheit R_4 von 3 Euro zu berücksichtigen.
- d) Zusätzlich sind noch 100 Einheiten Z_1 und 200 Einheiten Z_2 zu produzieren, die auf dem Markt angeboten werden sollen. Berechnen Sie die Rohstoffkosten beim erweiterten Sortiment.

7*. Für einen zweistufigen Produktionsprozess sind die jeweiligen Bedarfsgrößen an Roh- und Zwischenprodukten in den folgenden beiden Tabellen zusammengefasst:

	E_1	E_2
Z_1	3	5
Z_2	0	1
Z_3	2	0
Z_4	1	1

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	1	0	5	6
R_2	0	2	4	5

R_1, R_2 bezeichnen die Rohstoffe, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 die Zwischenprodukte und E_1, E_2 die Endprodukte.

- a) Bestimmen Sie die Gesamtverflechtungsmatrix von Rohstoffen und Endprodukten.
- b) Berechnen Sie den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 20 Einheiten E_1 und 30 Einheiten E_2 .
- c) Berechnen Sie die Rohstoffkosten zur Produktion der unter b) genannten Mengen für E_1 und E_2 . Dabei sind Kosten für eine Einheit R_1 von 2 Euro und für eine Einheit R_2 von 1 Euro zu berücksichtigen.

d) Zur Berechnung zweier Varianten mit vorgegebenen Mengen an Endprodukten ist die Matrixgleichung

$$CX = B$$

zu lösen, wobei $C \in \mathbb{R}^{2,2}$ die Verflechtungsmatrix aus Teil a) und $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ die Matrix mit den Mengen an Endprodukten ist. Geben Sie eine allgemeine Lösungsformel für die Matrix $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ an. Bestimmen Sie dann daraus X speziell für das C aus a) und für

$$B = \begin{pmatrix} 30 & 200 \\ 20 & 130 \end{pmatrix}.$$