Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Sommersemester 2021

Aufgabenserie 5 zur Vorlesung "Mathematik für Kompass"

1. Gegeben seien die Punkte $P_1(2,-1,0), P_2(4,0,5), P_3(-2,4,4), P_4(-5,1,-8)$, $P_5(-4,-1,-11)$. Die Punkte P_1, P_2, P_3 liegen auf der Ebene E.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g, die durch P_4 und P_5 verläuft.

b) Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die senkrecht auf E steht und durch den Punkt $S(8,9,0)$ verläuft. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von E und h.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $R(4,-1,-3)$ zur Ebene E.

2. Gegeben seien die Punkte $P_1(3,-2,5), P_2(2,1,3), P_3(0,-1,4), P_4(5,7,0)$, $P_5(8,3,3)$. Die Ebene E verläuft durch die Punkte P_1, P_2, P_3.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine parameterfreie Gleichung der Ebene E an.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g, die durch die Punkte P_4 und P_5 geht.

3. Die Punkte $P_1(8,3,-4), P_2(-4,6,5), P_3(6,6,10)$ und $P_4(12,7,18)$ seien gegeben. Die Gerade g verlaufe durch die Punkte P_1, P_2. Die Punkte P_3, P_4 liegen auf der Geraden h.

a) Untersuchen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden. Wenn ja gebe man den Schnittpunkt an und bestimme den Schnittwinkel.

b) Die Ebene E verläuft senkrecht zur Geraden g durch den Punkt P_4. Geben Sie eine parameterfreie Gleichung von E an.

4. Gegeben sind zwei Geraden. Die Punkte $P_1(-1,-3,-3)$ und $P_2(-2,1,-2)$ liegen auf der Geraden g_1. Die Punkte $P_3(-3,6,2)$ und $P_4(-2,3,4)$ liegen auf der Geraden g_2.

a) Schneiden sich die beiden Geraden? Wenn ja, dann bestimme man den Schnittpunkt.

b) Die Gerade g_3 verläuft durch P_3 und $P_5(-2,7,3)$. Schneiden sich die Geraden g_1 und g_3? Wenn ja, dann bestimme man den Schnittpunkt.

5. Gegeben sind zwei Ebenen. Die Punkte $P_1(-1,1,-1)$ und $P_2(8,2,-2), P_3(6,0,-4)$ liegen auf der Ebene E_1. Von der anderen Ebene ist eine parameterfreie Darstellung bekannt: $E_2 : 2x - y - z = 7$.

a) Man bestimme man die Schnittgerade und gebe eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.

b) Ermitteln Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen.
c) Welchen Abstand besitzt der Punkt P_2 von der Ebene E_2?

6. Gegeben seien zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben. Bestimmen Sie außerdem einen Vektor $\vec{c}$ so, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine orthonormale Basis bilden. Geben Sie die Koordinaten des Vektors

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ bezüglich der konstruierten orthonormalen Basis an.

7. Bestimmen Sie h_1, h_2, h_3 so, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ h_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

paarweise orthogonal sind. Man konstruiere aus den drei entstehenden Vektoren eine orthonormale Basis. Welche Koordinaten hat der Vektor

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$ bezüglich der konstruierten Basis?